

آزمون t استودنت

(SAS)

تدوین: مرکز تحلیل آماری خوارزمی

www.kharazmi-statistics.ir

مرکز آماری خوارزمی

مقدمه:

آزمون های t به طور کل دو نوع هستند. آزمون های t مربوط به یک جامعه که در آن فرض صفر به شکل $H_0: \mu = \mu_0$ بوده و آزمون های t مربوط به دو جامعه که در آن فرض صفر به صورت $H_0: \mu_1 = \mu_2$ است. هر چند اگر نمونه های تصادفی که از دو جامعه مورد نظر انتخاب می کنیم وابسته باشند، آزمون مربوط یعنی آزمون t جفتی به مقادیر فقط یک متغیر (تفاضل مشاهدات جفتی) بستگی دارد و عملاً می توان آن را آزمونی مربوط به یک جامعه (جامعه تفاضل ها) به شمار آورد. رویه t test برای تعیین فواصل اطمینان و اجرای آزمون های t برای مشاهدات تک نمونه مشاهدات جفتی و دو نمونه مستقل به کار می روند. آزمون فرض می تواند بر روی میانگین، اختلاف میانگین و نسبت های میانگین در داده هایی که از توضیح های نرمال و لگاریتم نرمال تبعیت می کنند در نظر گرفته شوند. در ادامه انواع آزمون های t استودنت را بیان می کنیم.

مطالبی که در این متن بیان شده است عبارتند از:

آزمون t یک نمونه ای

فاصله اطمینان برای میانگین جامعه

رسم نمودارهای آماری

چک کردن نرمال بودن توزیع داده ها

آزمون t برای توزیع لگ نرمال و میانگین هندسی

آزمون t تک نمونه ای برای داده هایی با فراوانی متفاوت

آزمون t برای داده های جفتی با دستور *proc mean*

آزمون t برای داد

ه های جفتی با دستور *proc ttest*

آزمون t برای دو جامعه مستقل

آزمون t یک نمونه ای

رویه ی proc means آزمون t را برای میانگین یک متغیر انجام میدهد. همچنین این رویه فاصله ی اطمینان برای میانگین جامعه را نیز محاسبه می کند. برای آزمون t پیش فرض $H_0: \mu = \mu_0$ است. برای آموزش و درک روشن از آزمون t مثال زیر بیان شده است.

مثال: داده های زیر مربوط به وزن ۲۱ نفر از دانش آموزان دختر در مقطع پنجم ابتدایی در مدرسه ای خاص است. قصد داریم آزمون کنیم که آیا میانگین وزن دانش آموزان از متوسط میانگین وزن دانش آموزان کشوری در این مقطع که ۴۰ کیلوگرم است بیشتر است یا نه؟ (اعداد فرضی است)

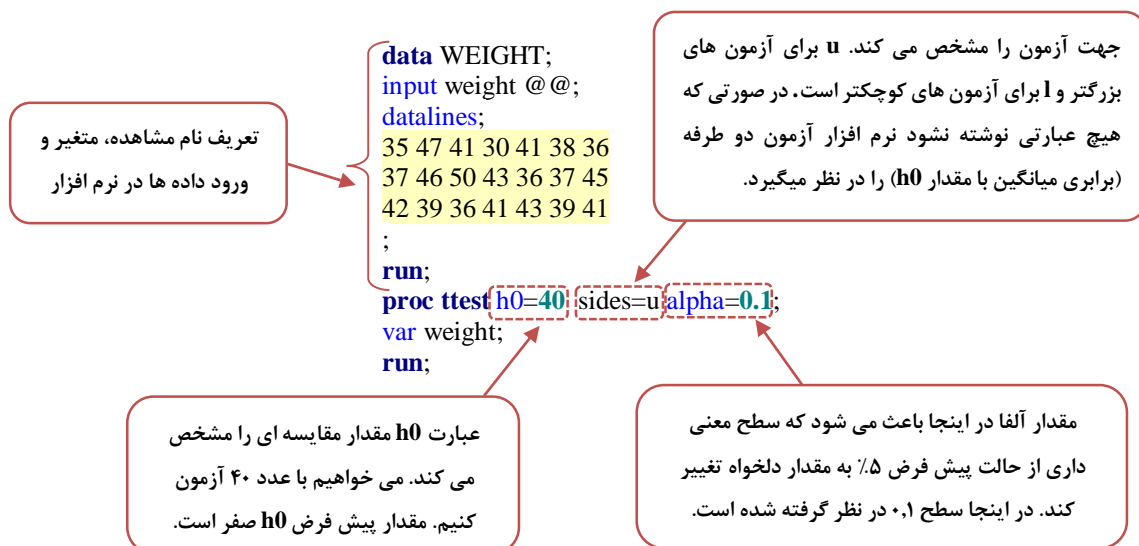
۳۵،۴۷،۴۱،۳۰،۴۱،۳۸،۳۶،۳۷،۴۶،۵۰،۴۳،۳۶،۳۷،۴۵،۴۲،۳۹،۳۶،۴۱،۴۳،۳۹،۴۱

$$\begin{cases} H_0: \mu_0 > 40 \\ H_1: \mu_0 < 40 \end{cases}$$

تمامی این مراحل برای حالت های دیگر فرض صفر (برابری و کوچکتر نیز) یکسان است.

عبارت های روبرو را در نرم افزار بنویسید.

مشاهده و متغیر weight تعریف شده است.



The SAS System 17:13 Tuesday

The TTEST Procedure

Variable: weight

| N | Mean | Std Dev | Std Err | Minimum | Maximum |
|---------|---------------|---------|----------------|---------|---------|
| 21 | 40.1429 | 4.6507 | 1.0149 | 30.0000 | 50.0000 |
| Mean | 90% CL Mean | Std Dev | 90% CL Std Dev | | |
| 40.1429 | 38.7978 Infty | 4.6507 | 3.7110 6.3139 | | |
| DF | t Value | Pr > t | | | |
| 20 | 0.14 | 0.4447 | | | |

در صورتی که مراحل به درستی انجام شود پس از زدن دکمه submit در نوار ابزار خروجی نمایش داده شده در نرم افزار به صورت روبرو خواهد بود.

۱. حجم نمونه
۲. میانگین
۳. انحراف استاندارد
۴. خطای استاندارد
۵. کمینه
۶. بیشینه
۷. فاصله اطمینان ۹۰٪ (از آنجا که آزمون یک طرفه به سمت بالا است تنها کران پایین گزارش شده است).
۸. فاصله اطمینان ۹۰٪ انحراف استاندارد
۹. درجه آزادی
۱۰. مقدار آماره t
۱۱. مقدار احتمال و سطح معنی داری

با توجه به مقدار احتمال و سطح معنی داری بیشتر از ۰٫۱، در نتیجه دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد و فرض صفر بزرگتر بودن میانگین وزن دانش آموزان از ۴۰ کیلو گرم پذیرفته می شود.

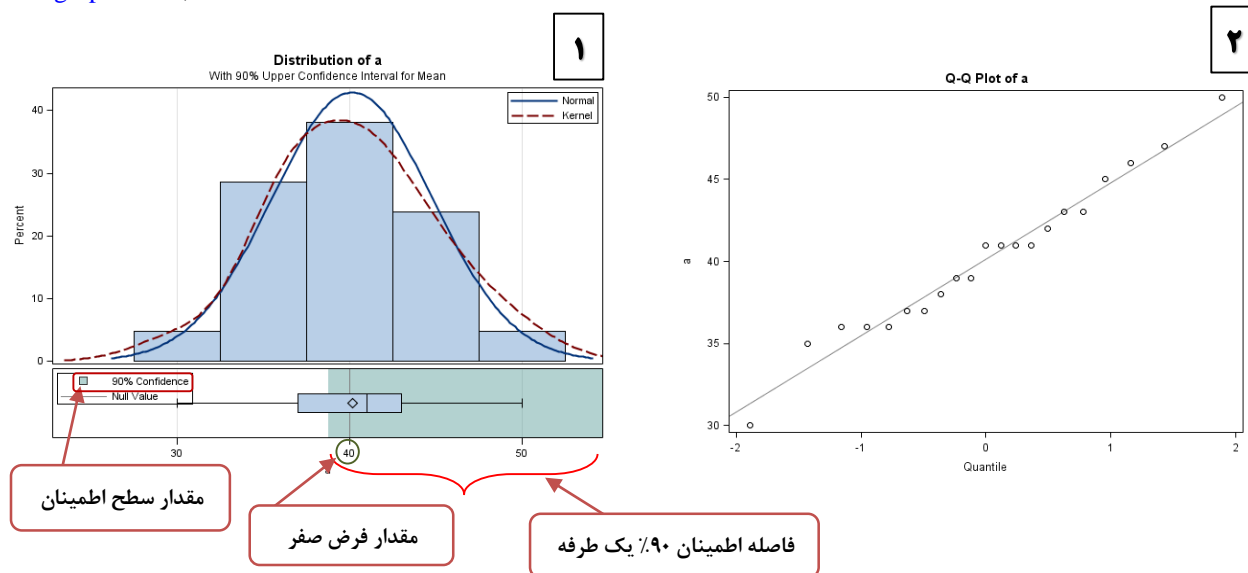
چنانچه دستورات زیر (دستور رسم نمودار) را در نرم افزار تایپ نمایید فرض صفر در نمودارها نمایش داده می شود.

از طریق پنجره *results* می توان نمودارهای رسم شده را مشاهده نمود.

```
data weight;
input weig @@;
datalines;
35 47 41 30 41 38 36
37 46 50 43 36 37 45
42 39 36 41 43 39 41
;
run;
ods graphics on;
proc ttest h0=40 plots(showh0) sides=u alpha=0.1;
var a;
run;
```

Show(h0) باعث نمایش فرض h_0 در نمودارها می شود.

ods graphics off;



تصویر ۱ شامل نمودارهای هیستوگرام، چگالی‌های نرمال و هسته، نمودار جعبه‌ای، فاصله‌ی اطمینان ۹۰٪ یک طرفه و نیز مقدار فرض صفر است. داخل بودن مقدار فرض صفر درون فاصله اطمینان نشان دهنده عدم رد و پذیرش فرض صفر است.

تصویر ۲ نمودار QQ است و نرمال بودن داده‌ها را چک می‌کند. چرا که یکی از شروط انجام آزمون t نرمال بودن داده‌های مورد بررسی است. لازم به ذکر است که در صورت نرمال بودن داده‌ها می‌توان از آزمون‌های پارامتریک استفاده کرد که آزمون t نیز از جمله آزمون‌های پارامتری است و در صورت نرمال نبودن داده‌ها باید از آزمون‌های ناپارامتریک استفاده کرد. در این مثال اختلاف معناداری با توزیع نرمال مشاهده نمی‌شود.

| نمره | فراوانی |
|------|---------|
| ۲۰ | ۵ |
| ۱۹ | ۴ |
| ۱۸ | ۶ |
| ۱۷ | ۷ |
| ۱۶ | ۳ |
| ۱۵ | ۷ |
| ۱۴ | ۴ |
| ۱۳ | ۲ |
| ۱۲ | ۴ |
| ۱۱ | ۵ |
| ۱۰ | ۳ |

مثال: در اینجا ۵۰ داده از نمرات ۵۰ دانش‌آموز با فراوانی‌های مختلف داریم می‌خواهیم نمرات ارائه شده را با عدد ۱۶ را آزمون نماییم.

عبارت‌های زیر را در نرم افزار تایپ نمایید.

توضیحات مربوط به فرامین و تفسیر خروجی در مثال قبل بیان شده است و تنها توضیح جدید مربوط به فرمان فراوانی است که بیان شده است.

```

data NUMBER;
input NUMBER count @@;
datalines;
20 5 19 4 18 6 17 7
16 3 15 7 14 4 13 2
12 4 11 5 10 3
;
ods graphics on;
proc ttest data=number h0=16;
var number;
freq count;
run;
ods graphics off;

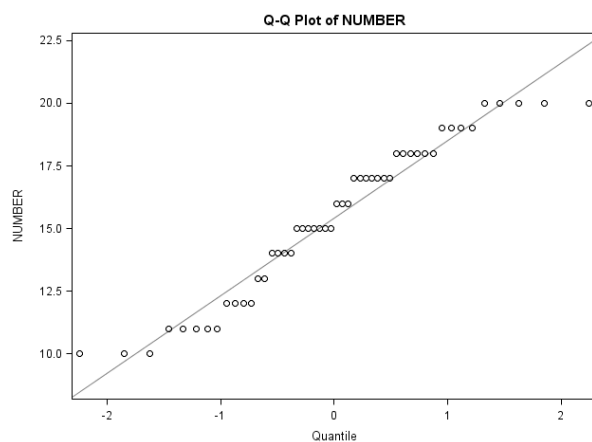
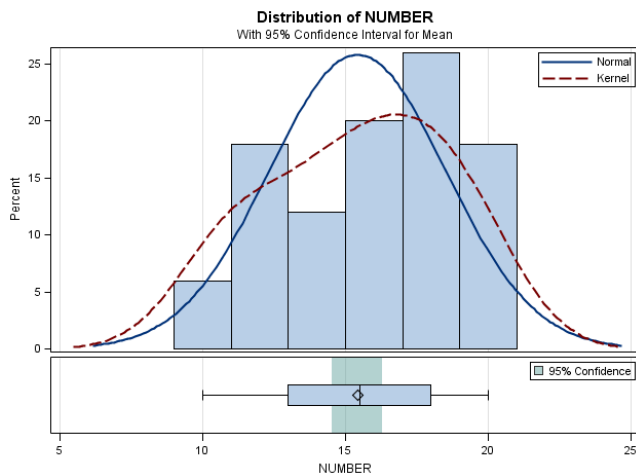
```

جهت تعریف فراوانی از این فرمان استفاده می شود.

The SAS System
The TTEST Procedure
Variable: NUMBER

Frequency: count

| N | Mean | Std Dev | Std Err | Minimum | Maximum |
|---------|-----------------|---------|----------------|---------|---------|
| 50 | 15.4200 | 3.0911 | 0.4371 | 10.0000 | 20.0000 |
| Mean | 95% CL Mean | Std Dev | 95% CL Std Dev | | |
| 15.4200 | 14.5415 16.2985 | 3.0911 | 2.5821 3.8519 | | |
| DF | t Value | Pr > t | | | |
| 49 | -1.33 | 0.1907 | | | |



با توجه به نمودار QQ توضیح نرمال است. در نتایج بدست آمده توضیح نرمال در سطح ۹۵٪ درصد پذیرفته می شود. در نتیجه نمرات تفاوت معنی داری با عدد ۱۶ ندارند.

آزمون t برای داده های جفتی

داده های جفتی سری داده هایی هستند که قبل و بعد یک داده پس از انجام یک فرایند را در نظر میگیرد. مانند شاخص سلامتی قبل و بعد از مصرف دارویی خاص. آزمون جفتی آزمونی مربوط به جامعه تفاضل در جفت مشاهدات وابسته است. برای انجام این آزمون از proc means استفاده می شود. برای انجام آزمون t در داده های جفتی به مثال زیر توجه نمایید.

مثال: ۲۰ نفر از افراد که شاخص سلامتی آن ها قبل و بعد از مصرف دارویی خاص اندازه گیری شده است در اینجا آورده شده است. میخواهیم میزان اثر بخشی دارو بر سلامتی افراد را آزمون کنیم. در این جا برای انجام آزمون مربوطه از رویه mean استفاده شده است. فرامین ارائه شده در این بخش علاوه بر اینکه مقدار میانگین و انحراف استاندارد را بدست می آورد، مقدار آماره t و مقدار سطح معنی دار در سطح ۹۵٪ را نیز محاسبه می کند. برای انجام آزمون t جفتی به وسیله ی رویه mean عبارت های زیر را در نرم افزار تایپ نمایید.

چنانچه مراحل به همان شکل بیان شده انجام شود خروجی همانند تصویر ارائه شده خواهد بود.

```
data;
input pretest posttest @@;
diff=posttest-pretest;
cards;
80 82 73 71 70 95 60 69 88
100 84 71 65 75 37 60 91 95
98 99 84 71 65 75 37 60 91
95 98 99 52 65 78 83 40 60
79 86 59 62
;
proc means mean stderr t prt;
var diff;
run;
```

paired test 16:52 1

The MEANS Procedure

Analysis Variable : diff

| Mean | Std Error | t Value | Pr > t |
|-----------|-----------|---------|---------|
| 7.2000000 | 2.3526021 | 3.06 | 0.0064 |

فرمان t جفتی در رویه ی mean

مقدار سطح معنی داری محاسبه شده

مثال: روش تدریس جدید انتخاب شده است و نمرات ۲۰ دانش آموزان قبل و بعد از تدریس جدید ثبت شده است. می خواهیم بدانیم آیا تدریس جدید تاثیری در میزان پیشرفت درسی دانش آموزان داشته است یا نه؟

```
data GREAD;
input before after @@;
datalines;
16 17 14 15 14 13 18 17 19 20
17 18 14 13 19 17 20 18 20 18
17 20 14 10 19 15 17 16 15 18
17 18 14 15 14 13 16 15 17 17
;
run;
```

```
ods graphics on;
proc ttest;
paired before*after;
run;
ods graphics off;
```

جفتی بودن داده ها در رویه ttest توسط این فرمان مشخص می شود.

The SAS System 23:53 Tuesday, Ju

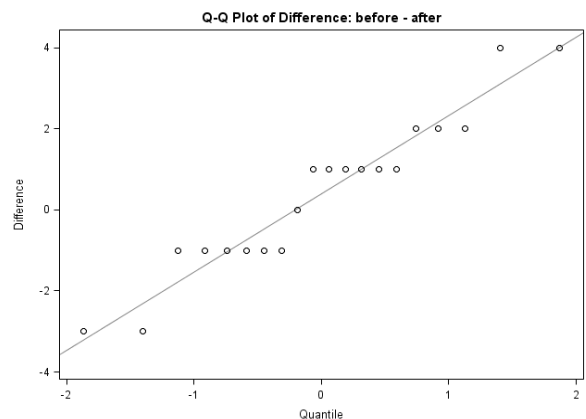
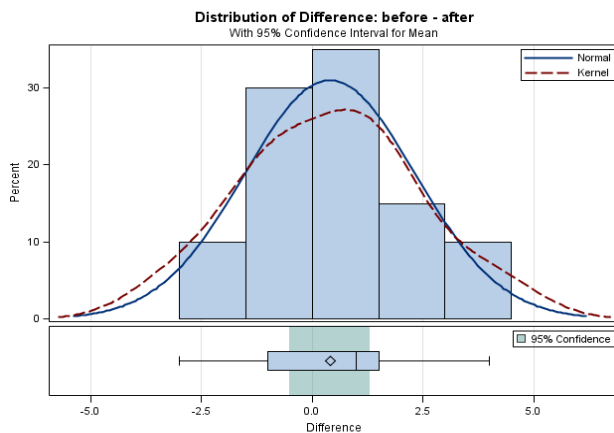
The TTEST Procedure

Difference: before - after

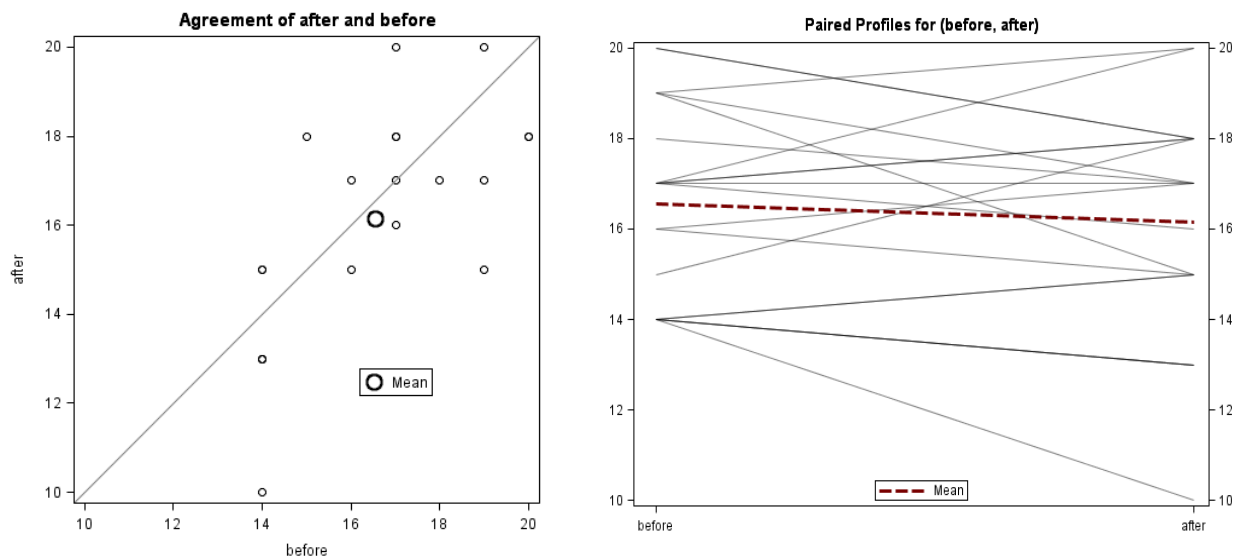
| N | Mean | Std Dev | Std Err | Minimum | Maximum |
|-------------|--------------------|----------------|-----------------------|---------|---------|
| 20 | 0.4000 | 1.9304 | 0.4316 | -3.0000 | 4.0000 |
| Mean | 95% CL Mean | Std Dev | 95% CL Std Dev | | |
| 0.4000 | -0.5034 1.3034 | 1.9304 | 1.4680 2.8194 | | |
| | DF | t Value | Pr > t | | |
| | 19 | 0.93 | 0.3657 | | |

سطح معنی داری آزمون

با توجه به عدد مربوط به مقدار معنی داری که بزرگتر از ۰.۰۵ است در نتیجه شواهدی بر رد فرض صفر برابری نمرات قبل و بعد از روش تدریس جدید وجود ندارد. پس فرض صفر رد نمی شود. در نتیجه می توان گفت تفاوت معنی داری بین نمرات قبل و بعد تدریس جدید رخ نداده است و این روش تاثیر چندانی در نمرات دانش آموزان نداشته است. در خروجی بالا مقدار فاصله ی اطمینان برای میانگین و انحراف استاندارد نیز محاسبه شده است.



با توجه به نمودار جعبه ای ارائه شده و محدوده ی رد و پذیرش فرض صفر، در این مثال دلیلی بر رد فرض صفر وجود ندارد و تفاوت معناداری در نمرات دانش آموزان قبل و بعد از روش جدید تدریس به چشم نمی خورد.



در نمودار agreement نقاطی که پایین خط رسم شده هستند نمراتی است که افت داشته و نمرات بالای خط نمراتی هستند که پیشرفت کرده اند. دایره ی بزرگتر و پررنگ مقدار میانگین را نشان می دهد. نمودار profile نشان میدهد ۸ نمره که ممکن است برای ۸ نفر و یا بیشتر از دانش آموزان باشد دارای شیب منفی است؛ یعنی این نمرات افت داشته اند. و تعداد ۶ خط که مانند قبل ممکن است نمرات ۶ نفر و یا بیشتر باشد دارای شیب مثبت است یعنی پیشرفت در نمره. نقطه ای نیز در نمودار agreement بر روی خط قرار دارد که در نمودار profile با شیب صفر رسم شده است. این یعنی فرد یا افرادی نیز با این نمره وجود دارد که تغییری در نمره ی آنها به وجود نیامده است. خط چین رسم شده در نمودار profile سطح افت یا پیشرفت نمرات دانش آموزان را رسم کرده است که متناسب با نقطه ی میانگین در نمودار agreement است. با توجه به شیب ملایم منفی و قرار گرفتن نقطه ی میانگین زیر خط رسم شده در نمودار agreement یعنی به طور میانگین با روش تدریس جدید موجب افت ناچیزی در نمرات دانش آموزان شده است.

مثال: اعداد ارائه شده در مثال قبل را در نظر بگیرید. در اینجا فرض کنید داده های ارائه شده از تابع لگ نرمال تبعیت می کند. می خواهیم میانگین هندسی این دو گروه را بین مقادیر ۰٫۸ تا ۱٫۲ به آزمون بگذاریم. عبارت های زیر را در نرم افزار تایپ نمایید.

```

data kharazmi;
input before after @@;
datalines;
16 17 14 15 14 13 18 17 19 20
17 18 14 13 19 17 20 18 20 18
17 20 14 10 19 15 17 16 15 18
17 18 14 15 14 13 16 15 17 17
;
ods graphics on;
proc ttest data=kharazmi dist=lognormal tost(0.8, 1.2);
paired before*after;
run;
ods graphics off;

```

tost برای مشخص کردن محدوده ی آزمون میانگین هندسی را مشخص می کند. در این جا محدوده ی مشخص شده (۰,۸ و ۱,۲) است.

جهت تعریف توزیع خاصی از فرمان dist استفاده می شود و چون در این جا توزیع داده ها لگ نرمال است از عنوان lognormal برای معرفی توزیع استفاده می شود.

باقی موارد در مثال های قبل توضیح داده شده است. لطفا برای مطالعه به مثال های قبل مراجعه نمایید.

چنانچه موارد ذکر شده به درستی انجام شود خروجی زیر بدست می آید.

The SAS System 14:50 Tuesday,

The TTEST Procedure

Ratio: before / after

| N | Geometric Mean | Coefficient of Variation | Minimum | Maximum |
|----|----------------|--------------------------|---------|---------|
| 20 | 1.0300 | 0.1253 | 0.8333 | 1.4000 |

| Geometric Mean | 95% CL Mean | Coefficient of Variation | 95% CL CV |
|----------------|---------------|--------------------------|---------------|
| 1.0300 | 0.9715 1.0919 | 0.1253 | 0.0951 0.1838 |

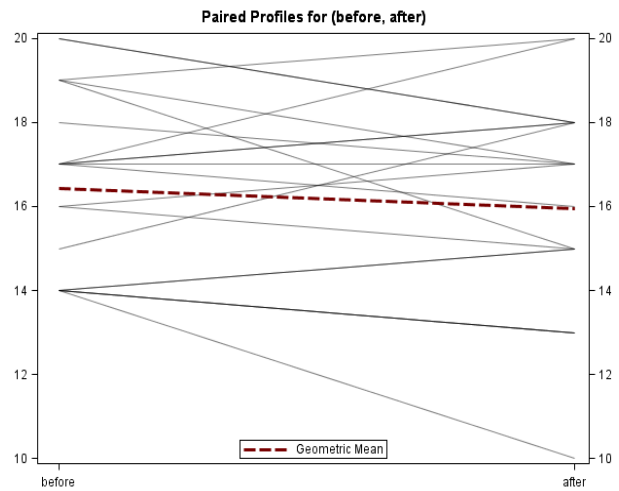
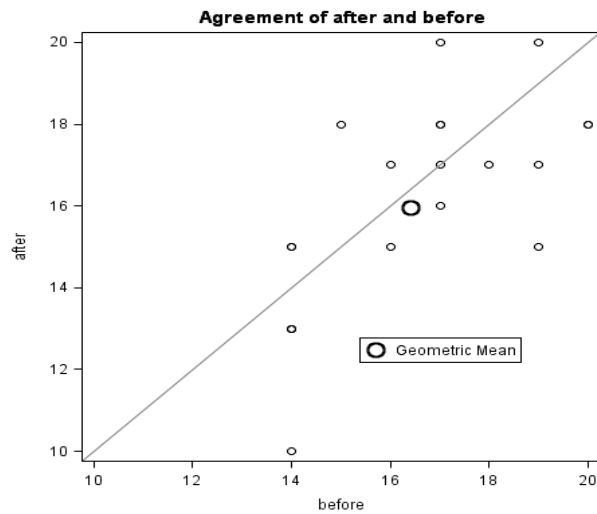
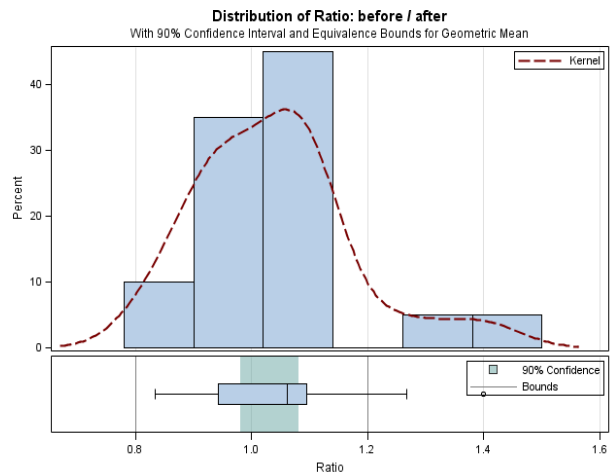
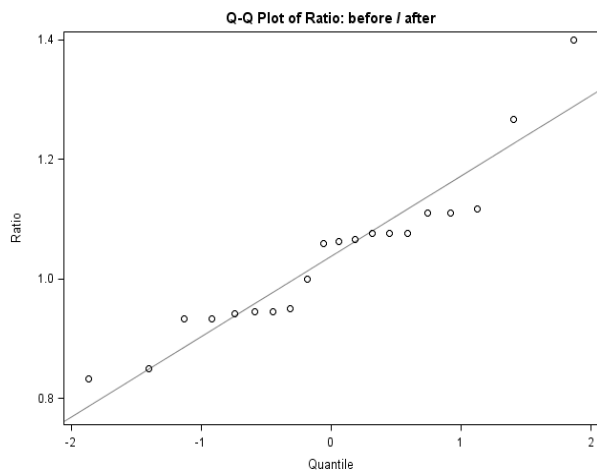
TOST Level 0.05 Equivalence Analysis

| Geometric Mean | Lower Bound | 90% CL Mean | Upper Bound Assessment |
|----------------|-------------|-----------------|------------------------|
| 1.0300 | 0.8 < | 0.9814 1.0809 < | 1.2 Equivalent |

| Test | Null | DF | t Value | P-Value |
|---------|------|----|---------|---------|
| Upper | 0.8 | 19 | 9.06 | < .0001 |
| Lower | 1.2 | 19 | -5.48 | < .0001 |
| Overall | | | | < .0001 |

۱. نسبت میانگین هندسی دو گروه ۲. فاصله ی اطمینان برای حالت ۹۵٪ و ۹۰٪* ۳. مقدار احتمال برای فرض صفر قرارگیری نسبت میانگین نسبی در بالا، پایین و بیرون از هر دو طرف. که در این حالت با توجه به کوچک بودن مقدار احتمال های بدست آمده از ۰,۵ فرض صفر رد می شود.

* فاصله اطمینان در حالت ۹۵٪ از فاصله ی اطمینان در حالت ۹۰٪ بزرگتر است.



توضیحات مربوط به نمودارهای در مثال های قبل بیان شده است. لطفا برای مطالعه ی توضیحات به مثال ها قبل مراجعه نمایید.

آزمون t برای دو جامعه مستقل

چنانچه دو گروه داده با توزیع مشابه (هر دو نرمال یا هر دو لگ نرمال) داشته باشیم می توانیم از آزمون t برای مقایسه میانگین دو جامعه ی مستقل استفاده کرد. برای توضیح بیشتر و انجام آزمون مورد نظر به مثال زیر توجه نمایید.

مثال: ۱۴ مشاهده از دو گروه رنگ سبز (g) و آبی (b) و میزان درجه بندی آنها بیان شده است. میخواهیم فرض صفر برابری میانگین درجه بندی این دو گروه رنگ را آزمون نماییم. عبارات زیر را در نرم افزار بنویسید.

```

title ttest;
data kharazmi;
input color $ level @@;
datalines;
g 24 b 25 b 23 b 30 g 24
b 29 b 23 g 32 b 27 g 28
g 26 b 26 b 28 g 27
;
proc ttest cochran;
class color;
var level;
run;
    
```

نام مجموعه ای از داده ها که باید تجزیه روی آن صورت گیرد را مشخص می کند. اگر از این کلمه ی اختیاری استفاده نکنید، آخرین مجموعه داده مورد تحلیل قرار می گیرد.

تعریف نام مشاهده، متغیر و ورود داده ها در نرم افزار، علامت \$ برای معرفی متغیر رشته ای است.

عبارات class در این دستور الزامی است و حتما باید استفاده شود.

گزینه ی Cochran سطح احتمال برای آزمون t در حالتی که واریانس ها نامساوی هستند را با استفاده از روش کاکران و کاکس ۱۹۵۰ محاسبه می کند.

ttest

The TTEST Procedure

Variable: level

| color | N | Mean | Std Dev | Std Err | Minimum | Maximum |
|------------|---|---------|---------|---------|---------|---------|
| b | 8 | 26.3750 | 2.6152 | 0.9246 | 23.0000 | 30.0000 |
| g | 6 | 26.8333 | 2.9944 | 1.2225 | 24.0000 | 32.0000 |
| Diff (1-2) | | -0.4583 | 2.7795 | 1.5011 | | |

| color | Method | Mean | 95% CL Mean | Std Dev | 95% CL Std Dev |
|------------|---------------|---------|-----------------|---------|----------------|
| b | | 26.3750 | 24.1886 28.5614 | 2.6152 | 1.7291 5.3226 |
| g | | 26.8333 | 23.6909 29.9758 | 2.9944 | 1.8692 7.3442 |
| Diff (1-2) | Pooled | -0.4583 | -3.7290 2.8123 | 2.7795 | 1.9932 4.5882 |
| Diff (1-2) | Satterthwaite | -0.4583 | -3.8728 2.9561 | | |

| Method | Variances | DF | t Value | Pr > t |
|---------------|-----------|--------|---------|---------|
| Pooled | Equal | 12 | -0.31 | 0.7653 |
| Satterthwaite | Unequal | 10.016 | -0.30 | 0.7710 |
| Cochran | Unequal | . | -0.30 | 0.7757 |

Equality of Variances

| Method | Num DF | Den DF | F Value | Pr > F |
|----------|--------|--------|---------|--------|
| Folded F | 5 | 7 | 1.31 | 0.7171 |

۱. آماره های توصیفی هر یک از گروه ها (شامل تعداد، میانگین، انحراف استاندارد، خطای استاندارد، کمینه و بیشینه؛
۲. آماره های توصیفی اختلاف گروه ها ۳. فاصله ی اطمینان میانگین ۹۵٪ برای هر دو گروه ۴. فاصله اطمینان انحراف استاندارد ۹۵٪ برای هر دو گروه ۵. واریانس های برابری را برای دو گروه در نظر می گیرد.
۶. عدم برابری واریانس ها برای دو گروه در نظر گرفته می شود. ۷. مقادیر احتمال در هر سه روش. (مقادیر محاسبه شده نشان می دهد که در حالت برابری و یا عدم برابری واریانس ها دلیل بر رد فرض صفر

وجود ندارد و فرض صفر یعنی برابری میانگین دو گروه پذیرفته می شود.)

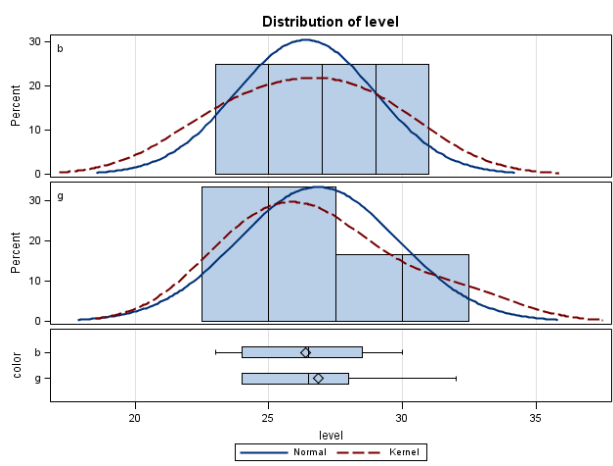
ی F. در این بخش نیز دلیلی بر رد فرض برابری میانگین ها در حالت برابری واریانس ها وجود ندارد و

فرض صفر پذیرفته می شود.

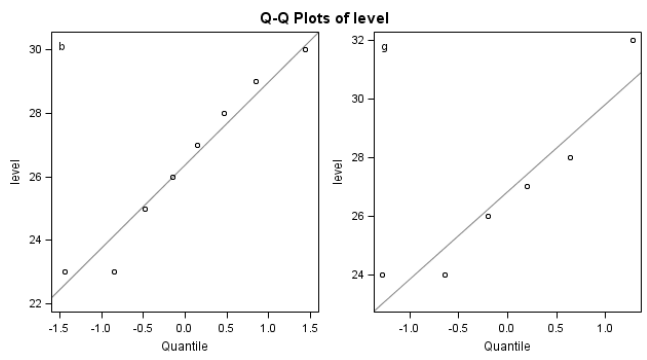
چنانچه دستورات زیر (دستور رسم نمودار) را در نرم افزار تایپ نمایید نمودارهای مربوط رسم میشود.

```
data STATE;
input color $ level @@;
datalines;
g 24 b 25 b 23 b 30 g 24
b 29 b 23 g 32 b 27 g 28
g 26 b 26 b 28 g 27
;
run;
ods graphics on;
proc ttest cochran ci=equal umpu;
class color;
var level;
run;
ods graphics off;
```

گزینه ی `ci=equal` باعث ارائه فواصل اطمینان دم های برابر و ناریب یک نواخت `umpu` برای انحراف استاندارد می شود.



نمودارهای هیستوگرام، چگالی های نرمال و هسته، نمودار جعبه ای رسم شده است. در نمودار روبرو درجه بندی های رنگی برای دو گروه تقریباً برابر است.



نمودار های QQ نرمالیتی دو گروه را نشان می دهند. چنان که نرمالیتی در یک یا دو گروه برقرار نباشد می بایستی از آزمون های ناپارامتریک استفاده کنیم.

منبع:

- آموزش گام به گام SAS، رسول نصیری، انتشارات فرهنگی نشر گسترش، سال ۱۳۸۴
- آموزش کاربردی SAS، ماهبانو تاتا و سید مرتضی موسوی، انتشارات پندار پارس، پاییز ۹۰
- موسسه فرهنگی دیجیتال بهگامان www.behkaman.ir