ماتریس و خواص آن

(R)

تدوین: مرکز تحلیل آماری خوارزمی

❋❋❋

www.kharazmi-statistics.ir
مرکز آماری خوارزمی

مقدمه:

در فایل "ماتریس و حل معادله" که در صفحه‌ی آموزش نرم‌افزار R سایت تحلیل آماری خوارزمی بارگذاری شده است به تعدادی از روابط و فعالیت‌هایی که در نرم‌افزارR برای ماتریس‌ها فراهم شده بود پرداختیم. در این فایل به تعدادی دیگر از فرامین مربوط به ماتریس‌ها در نرم‌افزار R می‌پردازیم. برای دسترسی به فایل اشاره شده اینجا را کلیک کنید.

مطالبی که در این فایل بیان شده است عبارتنداز:

خواص ماتریس‌ها

جدول دستورات

ماتریس مثلثی

خواص ماتریس‌ها

بُعد یک ماتریس: بُعد یک ماتریس تعداد سطرها و ستون‌های آن ماتریس است.

دترمینان ماتریس: دترمینان برای ماتریس‌های مربع محاسبه می‌شود. دترمینان برای ماتریس ۲*۲ مانند پایین به صورت (ad-bc) است ولی برای ماتریس‌های بزرگتر دترمینان پیچیده‌تر است.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

اما اگر مرتبه‌ی ماتریس بزرگتر از یک باشد (n>۱) دترمینان را به یکی از روش‌های زیر می‌توان محاسبه کرد.

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

۱. بسط لاپلاس
۲. روش گاوس برای محاسبه‌ی دترمینان
۳. روش تحویل برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس
۴. روش ساروس

ترانهاده ماتریس: هرگاه سطر و ستون ماتریسی جابه‌جا شود ماتریس ترانهاده تولید شده است.

معکوس ماتریس: معکوس ماتریس A با نماد A^{-1} نمایش داده می‌شود فرمول ریاضی آن به صورت زیر است. ماتریس معکوس برای حل n معادلات n مجهول کاربرد دارد.

$$A^{-1} = (\frac{1}{\det A})^{adj\,A}$$

برای آموزش حل معادله می‌توانید به فایل"ماتریس و حل معادله" که در صفحه‌ی آموزش نرم‌افزار R سایت تحلیل آماری خوارزمی بارگذاری شده است مراجعه نمایید.

{حاصل ضرب ماتریس معکوس و ماتریس اصلی ماتریس همانی می‌شود. ماتریسی درایه‌های قطر اصلی برابر ۱ هستند. و مابقی صفر. البته در نرم‌افزار ممکن است داریه‌های غیر از قطر اصلی با تقریبی در حدود 10^{-14} باشند.که به علت نزدیکی زیاد به صفر در عمل صفر در نظر گرفته می‌شود.}

صورت یکتای تجزیه‌ی یک ماتریس: صورت یکتای تجزیه‌ی یک ماتریس مربعی A شامل سه ماتریس مربعی U , D و V است. ماتریسD یک ماتریس قطری است و رابطه‌ی میان این ماتریس‌ها به صورت زیر است.

$$A = UDV^T$$

ماتریس‌های V , U را ماتریس‌های متعامد می‌نامند. به این معنا که $U^{-1} = U^T$ و $V^{-1} = V^T$. صورت یکتای یک ماتریس اغلب برای به دست آوردن جواب دقیق دستگاه معادلات خطی است. عناصر مقادیرD را مقادیر یکتای ماتریس A می‌نامند.

تجزیه چولسکی در یک ماتریس معین مثبت: اگر ماتریس A معین مثبت باشد، دارای ریشه دوم است. در واقع معمولا چند ماتریس B وجود دارد به طوری که $B^2=A$. تجزیه ی چولسکی نیز مشابه همین است، اما ایده‌ی اصلی این تجزیه، یافتن یک ماتریس بالامثلثی U است که $U^TU=A$.

عدد شرط یک ماتریس: عدد شرط نسبت بزرگترین مقدار یکتای غیر صفر به کوچکترین آن است. این عدد به ما کمک می‌کند تا بفهمیم که محاسبه‌ی عددی ما تا چه حد مطمئن و درست یا غلط است. هرچه مقدار شرط بزرگتر باشد، ویژگی‌های عددی آن ضعیف‌تر است.(مثلا اگر مقدار بزرگ باشد معکوس ماتریس زیاد دقیق نیست.)

در جدول روبرو دستورات مربوط به خواص ماتریس به صورت خلاصه بیان شده است.

نماد نرم افزار	دستور
dim(x)	بعد ماتریس
det(x)	دترمینان ماتریس
diag(x)	نمایش عناصر قطر اصلی
trace(function(x))	جمع عناصر قطر اصلی
t()	ترانهاده
solve(x)	معکوس واریانس از روش LU[1]
qr.solve(x)	معکوس واریانس از روش qr
Outer(x,y)	ضرب خارجی ماتریس
٪*٪	ضرب دو ماتریس
٪o٪	
crossprod(x,y)	محاسبه $x^t y$[2]
tcrossprod(x,y)	محاسبه xy^t[2]
eigen(x)	مقدار ویژه و بردار ویژه
svd(x)	صورت یکتای تجزیه ماتریس
qr(x)	روش تجزیه qr
chol(x)	تجزیه‌ی چولسکی در یک ماتریس معین مثبت
Kappa(x)	عدد شرط یک ماتریس
Kronecker(x,y)	ضرب کرونیکر دو ماتریس

[1] روش LU ، A را به عنوان ضرب دو ماتریس L و U در نظر می‌گیرد. ماتریس L پایین مثلثی با مقادیر ۱ روی قطر اصلی و ماتریس U ماتریس بالا مثلثی.

[2] برای عبارت‌هایی همچون $x^t y$ و xy^t حتما به تعداد سطر و ستون ماتریس‌ها دقت نمایید

crossprod(x,y): این عبارت ابتدا ماتریس x را ترانهاده کرده و سپس در y ضرب می‌کند. عبارت بدست آمده با t(y)%*%x برابر است اما ارجحیت با crossprod(x,y) است. چرا که در این حالت حافظه‌ی کمتری از نرم‌افزار اشغال می‌شود.

مثال: ماتریس زیر را در نرم افزار تعریف کرده و فرامین مربوط به خواص بیان شده در جدول را اعمال نمایید.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

برای ورود داده‌ها در نرم‌افزار R به صورت زیر عمل نمایید.

جملات نمایش داده شده در خروجی را عینا در نرم‌افزار تایپ نمایید.

خروجی نرم‌افزار

چنانچه مراحل تایپ دستورات و ورود داده‌ها به درستی انجام شود خروجی‌ها شبیه به تصویر روبرو خواهد بود.

```
> A<-matrix(c(3,4,6,7,2,7,0,9,2,3,4,5,5,3,7,0),nr=4,nc=4)
> dim(A)
[1] 4 4
> det(A)
[1] -32
> diag(A)
[1] 3 7 4 0
> trace(diag(A))
[1] 14
> t(A)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    3    4    6    7
[2,]    2    7    0    9
[3,]    2    3    4    5
[4,]    5    3    7    0
> A
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    3    2    2    5
[2,]    4    7    3    3
[3,]    6    0    4    7
[4,]    7    9    5    0
> eigen(A)
$values
[1] 16.4471858 -5.4196452  2.8463343  0.1261251

$vectors
           [,1]        [,2]         [,3]         [,4]
[1,] -0.3701607 -0.41630977  0.005371152  0.534086009
[2,] -0.5057593  0.01813604  0.510405442  0.053444191
[3,] -0.5098322 -0.35630509 -0.849198023 -0.843689929
[4,] -0.5892874  0.83630374  0.135351960  0.009119023
```

مقدار ویژه

بردار ویژه

تفسیر خروجی بردار و مقادیر ویژه:

x_1 نمایانگر اولین ستون خروجی در بردار ویژه است. (کادر آبی) در نتیجه با توجه به اولین عدد مربوط به مقدار ویژه (کادر سبز) معادله‌ی زیر بر قرار است.

$$A\, x_1 = 16.4471858\, x_1$$

$$A\, x_2 = -5.4196452\, x_2$$

$$A\, x_3 = 2.8463343\, x_3$$

$$A\, x_4 = 0.1261251\, x_4$$

خروجی مربوط به صورت یکتای تجزیه یک ماتریس

```
> A.svd<-svd(A)
> A.svd
$d
[1] 17.36790274  8.47240016  2.75102547  0.07904994

$u
           [,1]       [,2]       [,3]       [,4]
[1,] -0.3218906  0.3565566 -0.4621393 -0.7454403
[2,] -0.5071100 -0.1762041 -0.6501053  0.5377311
[3,] -0.4468003  0.7426444  0.3970404  0.3020062
[4,] -0.6630199 -0.5387939  0.4540367 -0.2528960

$v
           [,1]        [,2]       [,3]         [,4]
[1,] -0.5939723  0.12383293  0.5720268 -0.551948920
[2,] -0.5850292 -0.63375912 -0.5047880 -0.035766772
[3,] -0.4184392  0.05442481  0.3575942  0.833110394
[4,] -0.3603420  0.76161193 -0.5386100  0.000446502
```

در خروجی هر یک از ماتریس‌های u, d و v محاسبه شده است.

ماتریس مثلثی

ماتریس بالامثلثی: ماتریس که عناصر پایین قطر اصلی آن صفر باشد. چنانچه درایه‌های روی قطر اصلی نیز صفر باشد ماتریس اکیداً بالامثلثی نامیده می‌شود.

ماتریس پایین‌مثلثی: ماتریس که عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشد. چنانچه درایه‌های روی قطر اصلی نیز صفر باشد ماتریس اکیداً پایین‌مثلثی نامیده می‌شود.

```
> a
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    3    2    2    5
[2,]    4    7    3    3
[3,]    6    0    4    7
[4,]    7    9    5    0
> upper.tri(a)
      [,1]  [,2]  [,3]  [,4]
[1,] FALSE  TRUE  TRUE  TRUE
[2,] FALSE FALSE  TRUE  TRUE
[3,] FALSE FALSE FALSE  TRUE
[4,] FALSE FALSE FALSE FALSE
> anew<-a
> anew[upper.tri(a,diag=TRUE)]<-0
> anew
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    0    0    0    0
[2,]    4    0    0    0
[3,]    6    0    0    0
[4,]    7    9    5    0
> a
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    3    2    2    5
[2,]    4    7    3    3
[3,]    6    0    4    7
[4,]    7    9    5    0
> bnew[upper.tri(a)]<-0
> bnew
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    3    0    0    0
[2,]    4    7    0    0
[3,]    6    0    4    0
[4,]    7    9    5    0
```

برای تولید ماتریس‌های پایین مثلثی و بالا مثلثی از فرمان‌های lower.tri() و upper.tri() استفاده می‌کنیم.

ماتریس a در تصویر روبرو تعریف شده است. با نوشتن دستور ماتریس بالا مثلثی ایجاد می‌شود.

اما چنانچه بخواهید ماتریس را تشکیل دهید بدین صورت عمل نمایید. ابتدا اسمی برای ماتریس جدید انتخاب کنید. (در اینجا anew) با نوشتن عبارت anew[upper.tri(a,diag=TRUE)]<-0 تمام عناصر اصلی در قطر اصلی و درایه‌های بالای قطر اصلی برابر با صفر می‌شود. با این روند یک ماتریس پایین مثلثی بدست می‌آید. چنانچه عبارت diag=TRUE نوشته نشود درایه‌های قطر اصلی صفر نمی‌شود.

همان طور که در تصویر مشاهده می‌کنید تمامی درایه‌های بالای قطر اصلی و خود قطر اصلی در anew برابر صفر شده است. و درایه های بالای قطر اصلی در bnew برابر صفر است.

خروجی مربوط به دستور outer

برای دستور outer چنانچه به جای علامت "/" از هر یک از دیگر عملگر ها استفاده کنیم نتیجه متناسب با آن عملگر تغییر می کند.

```
> x
     [,1] [,2]
[1,]    3    2
[2,]    4    5
> z
     [,1] [,2]
[1,]    1    3
[2,]    2    4
> outer(x,z, "/")
, , 1, 1

     [,1] [,2]
[1,]    3    2
[2,]    4    5

, , 2, 1

     [,1] [,2]
[1,]  1.5  1.0
[2,]  2.0  2.5

, , 1, 2

         [,1]      [,2]
[1,] 1.000000 0.6666667
[2,] 1.333333 1.6666667

, , 2, 2

     [,1] [,2]
[1,] 0.75 0.50
[2,] 1.00 1.25
```

تمام درایه‌های ماتریس z بر درایه‌ی (۱،۱) از ماتریس x تقیسم می‌شوند.

تمام درایه‌های ماتریس z بر درایه‌ی (۲،۱) از ماتریس x تقیسم می‌شوند.

منبع:

-مبانی برنامه نویسی آماری با R، تالیف جان براون و دانکن مرداک،ترجمه: دکتر منوچهر بابانژاد و مبین ملکشاه، انتشارات دانشگاه گلستان، ۱۳۹۳

A Tiny Handbook of R, Mike Allerhand, Springer, 2011-